数理解析研究所講究録
第 822 巻 1993 年 123-131

リーマン幾何に於ける等スペクトル変形

徳島大学・教養部　桑原類史 (Ruishi Kuwabara)

1．序

(M,g) をコンパクトなリーマン多様体とするとき，計量 g から M 上の関数に作用するラプラシアン

$$\Delta_g = -\frac{1}{\sqrt{g}}\sum \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}g^{ik}\frac{\partial}{\partial x^k}\right)$$

が自然に定義される。Δ_g は非負，2階楕円型自己共役作用素で，そのスペクトル ($Spec(M,g)$) は非負の固有値　$\{\lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \lambda_i \leq \cdots\}$　であり，それは (M,g) の幾何学的構造を反映している。$Spec(M,g)$ と (M,g) の幾何学的構造の関係における最初の考察は，物理学者 H. A. Lorentz による黒体輻射に関する予想を解決した H. Weyl の仕事 (1912) であろう。そして，1966 年の M. Kac の刺激的な論文（エッセイ？）"Can one hear the shape of a drum?" 以来，所謂 "Spectral Geometry" と呼ばれる分野として，多くの結果が蓄積されてきた。

その中で，基本的な問題は等スペクトル問題：

$$Spec(M,g) = Spec(M',g') \quad \Longrightarrow \quad (M,g) = (M',g') \text{ (isometric) ?}$$

であろう。これについては，J. Milnor による 16 次元平坦トーラスの反例 (1964) 以来，多くの人達が反例を構成している。特に，砂田氏は数論的な考察によって，等スペクトルな（等長的でない）リーマン多様体の一般的構成法を与えた (1985) 。

一方，砂田理論などからはずれる問題として，所謂等スペクトル変形：M 上のリーマン計量の 1 ーパラメータ族 $g(t)$ で $Spec(M,g(t)) = Spec(M,g(0))$ を満たすもの　が存在するか？という問題がある。これについて，肯定的な解答を与えたのは，C. Gordon と E. Wilson [4] である。彼らは solvmanifold（可解リー群を離散部分群で割ったもの）上の計量で自明でない等スペクトル変形を構成した。

この報告では，Gordon-Wilson の等スペクトル変形について，力学的視点から，特に，ソリトン理論で鍵となる Lax 方程式を意識しながら，考察してみることにする。

2．ベキ零多様体（nilmanifold）における等スペクトル変形

Gordon 達はリー環の almost-inner derivation（概内部微分？）という概念を導入した。すなわち，リー環 g の微分 (derivation) ϕ が almost-inner であるとは，$\forall X \in \mathfrak{g}$ にたいして，g のある（X に依存する）元 $Y = Y_X$ が存在して $\phi(X) = [Y, X]$ となること と定義する。

いま，g をベキ零リー環，$G = \exp(\mathfrak{g})$（単連結，ベキ零リー群）とする。Γ を G の離散部分群で，$M = \Gamma\backslash G$ がコンパクトとなるものとする。$\langle,\rangle$ を g の内積とすれば，それは G の左不変リーマン計量を定義し，さらに，M上のリーマン計量を定める。さて，g の derivation ϕ にたいして，g の１－パラメータ自己同型群 $\Phi_t := \exp(t\phi)$ が定まる。これにより，g の内積の１－パラメータ族

$$\langle X, Y\rangle_t := \langle \Phi_t(X), \Phi_t(Y)\rangle$$

が定義され，さらに，M上のリーマン計量の１－パラメータ族が誘導される。このとき，

定理(Gordon-Wilson)．微分 ϕ が almost-inner ならば，それから誘導される M の計量の変形 $\langle,\rangle_t$ は等スペクトル変形である。

註1．ϕ が内部微分ならば，$\langle,\rangle_t$ は自明な変形である。即ち，M の微分同相写像の１－パラメータ族 ψ_t が存在して $\langle,\rangle_t = \psi_t^*\langle,\rangle$ が成り立つ。

２．Gordon [2] では，G の離散部分群 Γ に対して，Γ-almost-inner derivation という，almost-inner より弱い概念を導入し，それによる $M = \Gamma\backslash G$ 上の計量の変形が等スペクトルであることを示している。さらに，Ouyang-Pesce [8] は，２－ステップベキ零リー群 G の場合，G の左不変計量から誘導される $M = \Gamma\backslash G$ の計量の変形で等スペクトルであるものは，Γ-almost-inner derivation から構成されるものに限ることを示した。

例．g を次のような７次正方行列のなすリー環とする：

$$
\left(\begin{array}{cccc|ccc}
0 & x_1 & x_2 & z_1 & & & \\
0 & 0 & 0 & y_1 & & 0 & \\
0 & 0 & 0 & y_2 & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & & & \\
\hline
 & & & & 0 & x_1 & z_2 \\
 & 0 & & & 0 & 0 & y_2 \\
 & & & & 0 & 0 & 0
\end{array}\right).
$$

g は2ーステップベキ零リー環で，自然な基底：$B = \{X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2\}$ をとれば，交換関係

$$[X_1, Y_1] = [X_2, Y_2] = Z_1, \quad [X_1, Y_2] = Z_2, \quad 他 = 0$$

を満たす。さて，g の線形変換 ϕ を

$$\phi(Y_2) = Z_2, \quad \phi(他) = 0 \quad (基底に対して)$$

によって定義する。このとき，ϕ は almost-inner derivation である。実際，$X = \sum_{i=1}^{2}(a_i X_i + b_i Y_i + c_i Z_i)$ に対して

$$\phi(X) = \begin{cases} [Z_1, X] & (b_2 = 0) \\ [X_1 - (b_1/b_2)X_2, X] & (b_2 \neq 0) \end{cases}$$

が成立する。

3．古典力学的考察

Gordon-Wilson による等スペクトル変形の例は，表現論（Kirillov の理論）をベースに構成されているが，ここでは力学的観点を表に出して，議論してみたい。特に，ソリトン理論を意識して，Lax 形式で表すことを考えてみる。

M上の計量の変形 $\langle , \rangle_t$ を考える。計量 $\langle , \rangle_t$ から定まるラプラシアンを Δ_t とする。Gordon-Wilson の等スペクトル変形が Lax 方程式

$$\Delta_t' = [\Delta_t, A_t] \tag{3.1}$$

の形で表現できるであろうか。ただし，ここで，作用素 A_t として，どんなクラスで考えるかであるが，力学的観点から，古典的な1次擬微分作用素（classical pseudo- differential operator of order 1）を考えることにする。すると，それぞれの作用素のシンボルを考えることにより，方程式 (3.1) から M の余接バンドル T^*M 上の関数についての方程式

$$H_t' = \{H_t, a_t\} \tag{3.2}$$

が得られる。ここで，H_t は T^*M 上の自然な力学系（＝測地流の系）(T^*M, ω, H_t) のハミルトニアンで，$\{,\}$ はポアソン括弧である。計量の変形にたいして，方程式 (3.2) を満たす $T^*M \backslash 0$ 上の滑らかな関数 a_t が存在すれば，a_t から定まるハミルトンベクトル場を無限小変換とする正準変換の族によって，ハミルトン力学系の同型

$$(T^*M, \omega, H_t) \cong (T^*M, \omega, H_0) \tag{3.2'}$$

が導かれる。Gordon-Wilson の等スペクトル変形で，このようになっているのであろうか。（これを満たす計量の変形をシンプレクティック変形と呼ぶことにする。）実は，これは一般に成り立たないことが分かっている（[3]）。条件 (3.2') より弱いものとして，L-等スペクトルという条件が考えられる。即ち，力学系 (T^*M, ω, H_t) の周期軌道の周期（＝閉測地線の長さ）のなす集合（重複度をこめて）（L-spectrum と呼ぶ）が等しい　という概念である。勿論，シンプレクティック変形は L-等スペクトル変形である。これについて，

定理（Gordon [2]）．Gordon-Wilson の等スペクトル変形は，L-等スペクトル変形である。

注． ある "generic" な条件の下では, 等スペクトル変形は L-等スペクトルであることが分かっている（Colin de Verdière [1]）。

等スペクトル変形によって，古典力学系としての構造が完全に保たれていることは一般に成立しないが，上の定理に示されるように，似た構造をしていることは期待できる。それは，以下に示すように，力学系 $\mathcal{H}_t = (T^*M, \omega, H_t)$ を簡約化をすることによって見えてくる。

リー群 G の余接バンドル T^*G は G の（左からの）積の作用によって $G \times \mathfrak{g}^*$ と同型になる（$\mathfrak{g}^*$：$\mathfrak{g}$の双対空間)。これから，$T^*M \cong M \times \mathfrak{g}^*$ が従う。G の中心を Z とする

と，$\pi : G \to G_1 = G/Z$ から，主トーラス束：

$$\hat{\pi} : M = \Gamma\backslash G \to M_1 = \Gamma_1\backslash G_1 \quad (\Gamma_1 = \pi(\Gamma)) \tag{3.3}$$

が定義される。ファイバーは $T = \Gamma \cap Z\backslash Z$ である。積の作用によって，Z の $M \times \mathrm{g}^*$ 上へのシンプレクティック作用が自然に定義される。このとき，対応する運動量写像 $J : M \times \mathrm{g}^* \to \mathrm{z}^*$ (z: Zのリー環）が次のように定まる：

$$J([g],\mu)(X) = \mu(X) \quad (g \in G, \mu \in \mathrm{g}^*, X \in \mathrm{z})$$

Marsden-Weinstein [7] の簡約化 (reduction) の手続きにより，各 $\kappa \in \mathrm{z}^*$ に対して，$\mathcal{H}_t$ の簡約化された力学系：

$$\mathcal{H}_{t,\kappa} = (P_\kappa, \omega_\kappa, H_{t,\kappa}), \qquad P_\kappa = J^{-1}(\kappa)/Z$$

が誘導される。

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[dd, "\hat{\pi}"] & M \times \mathfrak{g}^* \arrow[l] \arrow[r, "J"] & \mathfrak{z}^* \\
 & J^{-1}(\kappa) \arrow[u, hook] \arrow[d] & \\
M_1 & M_1 \times \mathfrak{g}_1^* \cong P_\kappa \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

この $\mathcal{H}_{t,\kappa}$ の構造を調べてみる。M上のリーマン計量から，主トーラス束 (3.3) の接続 $\tilde{\nabla}_t$ が自然に導入される：即ち，$p \in M$ における水平ベクトル空間 $H_t(p)$ を

$$H_t(p) = \{u \in T_pM \mid \langle u, v\rangle_t = 0 \text{ for } \forall v \in Ker(\hat{\pi}_*)\}$$

と定義する。また，$\pi : G \to G_1$ が Riemannian submersion になるように G_1 の左不変計量 $\langle , \rangle_{1,t}$ を定める。すると，

命題 3．1． $\mathcal{H}_{t,\kappa} \cong (M_1 \times \mathrm{g}_1^*, \omega_1 + \kappa\hat{\Theta}_t, H_{t,\kappa}^{(1)})$,
ここで，ω_1 は $M_1 \times \mathrm{g}_1^* (\cong T^*M_1)$ の標準的シンプレクティック形式，$\hat{\Theta}_t$ は接続 $\tilde{\nabla}_t$ の曲率 Θ_t（M_1 上の z–値２次形式）を $M_1 \times \mathrm{g}_1^*$ に引き戻したもの，そして，

$$H_{t,\kappa}^{(1)}([g_1], \mu_1) = \frac{1}{2}|\mu_1|_{1,t}^2 + \frac{1}{2}|\kappa|_t^2$$

である。

註. G が２－ステップベキ零リー群の場合は，$\hat{\Theta}_t$ は M の計量に依存せず，リー環の構造にのみ依存する。

さて，主要な結果は次である。

定理３．２（[5]）．G が２－ステップベキ零リー群とする。$\mathcal{H}_{t,\kappa}$ を Gordon-Wilson の等スペクトル変形に伴う簡約力学系の１－パラメータ族とする。このとき，任意の $\kappa \in \mathrm{z}^*$ にたいして，

$$\mathcal{H}_{t,\kappa} \cong \mathcal{H}_{0,\kappa}$$

が成り立つ。即ち，P_κ の微分同相写像の族 χ_t で

$$\chi_t^*\omega_\kappa = \omega_\kappa, \qquad \chi_t^* H_{0,\kappa} = H_{t,\kappa}$$

を満たすものが存在する。

（証明の粗筋）各 $\kappa \in \mathrm{z}^*$ に対して，g^* の部分多様体

$$\mathrm{z}_\kappa^\perp = \{\mu \in \mathrm{g}^* | \, \mu(X) = \kappa(X) \text{ for } \forall X \in \mathrm{z}\}$$

を考える。$\mathrm{z}_\kappa^\perp$ の接空間は $\mathrm{z}^\perp = \{\mu \in \mathrm{g}^* | \, \mu(X) = 0 \text{ for } \forall X \in \mathrm{z}\}$ であり，$P_\kappa = M_1 \times \mathrm{z}_\kappa^\perp$ であることに注意。さて，almost-inner derivation ϕ に対して，次の条件を満たすような $\mathrm{z}_\kappa^\perp$上の滑らかなベクトル場が存在するとする：

(c.1) ϕ の双対写像 ϕ^* に対して

$$\phi^*(\mu) = ad^*(Y_\kappa(\mu))\mu \quad (\mu \in \mathrm{z}_\kappa^\perp)$$

(c.2) ベクトル場 Y_κ に双対な１次微分形式が閉である。

このとき，P_κ 上の滑らかなベクトル場

$$V([g_1],\mu)=(L_{g_1*}(Y_\kappa^{(1)}(\mu)),-\phi^*(\mu))$$

を考える。ここで，L_{g_1} は $g_1\in G_1$ による G_1上の左移動を表し，$Y_\kappa^{(1)}=\pi_*\circ Y_\kappa$: $\mathrm{z}_\kappa^\perp\to\mathrm{g}_1=\mathrm{g}/\mathrm{z}$ である。すると，この V が定理の正準変換の族 χ_t を生成することが示される。そして，g が2－ステップベキ零リー環ならば，任意の almost-inner derivation に対して，各 $\kappa\in\mathrm{z}^*$ について，$\mathrm{z}_\kappa^\perp$ 上で一定なベクトル場 Y_κ で (c.1), (c.2) を満たすものがとれることが言える。 ∎

G が一般のベキ零リー群の場合については，ϕ にたいして (c.1), (c.2) を満たす滑らかなベクトル場 Y_κ が $\kappa=0$ のとき存在しない例がある（[5]）。しかし，いくつかの例を調べてみると，次は成り立つように思える：

任意の 0 でない $\kappa\in\mathrm{z}^*$ に対して，　$\mathcal{H}_{t,\kappa}\cong\mathcal{H}_{0,\kappa}$.

ところで，$\kappa=0$ に対する簡約力学系は，元のベキ零リー群を中心で割った（ステップ数の小さい）ベキ零多様体上の測地流の系であるから，簡約化の手続きを更に続けることができる。そして，これを繰り返せば，2－ステップの場合に行き着く。よって，上の予想が成り立てば，結局,『全てのベキ零リー群の場合に，何回か簡約化をして得られた各簡約力学系は，Gordon-Wilson の等スペクトル変形の下で，同型のままで保たれる』ことが言える。

補足. 今までの議論は，力学系を簡約化して分析することであったが，元の力学系 $\mathcal{H}_t=(M\times\mathrm{g}^*,\omega,H_t)$ そのものとして見たとき，多くの例において，次のことが成り立っている（[6]）：

$\dot{\mathrm{g}}^*=\mathrm{g}^*\setminus 0$ の粗な集合 V が存在して

$$(M\times(\dot{\mathrm{g}}^*\setminus V),\omega,H_t)\cong(M\times(\dot{\mathrm{g}}^*\setminus V),\omega,H_0).$$

即ち，粗な集合を除いた相空間における力学系（部分力学系）は不変に保たれている。

例えば，前記（2節）の例において，g^* の基底として，$\mathcal{B}$の双対基底 $\mathcal{B}^*=\{X_1^*,X_2^*,Y_1^*,$

$Y_2^*, Z_1^*, Z_2^*\}$ をとる。いま，

$$V = \{\mu = \sum_{i=1}^{2}(\mu_i X_i^* + \nu_i Y_i^* + \kappa_i Z_i^*) | \kappa_1 = 0\} \subset \dot{\mathfrak{g}}^*$$

とおく。このとき，$M \times (\dot{\mathfrak{g}}^* \setminus V)$ 上のベクトル場

$$Z([g], \mu) = (L_{g*}(Y(\mu)), -\phi^*(\mu))$$

ただし，

$$Y(\mu) = -\frac{\kappa_2}{\kappa_1}X_2 + \frac{\mu_2\kappa_2}{\kappa_1^2}Z_1 - \frac{\mu_2}{\kappa_1}Z_2$$

が部分力学系の同型写像の１ーパラメータ族を生成する。

参考文献

[1] Y. Colin de Verdière, Spectre du Laplacien et longueurs des géodésiques périodiques I, II, Compositio Math. **27**(1973), 83-106, 159-184.

[2] C.S. Gordon, The Laplace spectra versus the length spectra of Riemannian manifolds, Contemp. Math. AMS **51**(1986), 63-80.

[3] C.S. Gordon, You can't hear the geodesic flow, preprint.

[4] C.S. Gordon and E.N. Wilson, Isospectral deformations of compact solvmanifolds, J. Differential Geom. **19**(1984), 241-256.

[5] R. Kuwabara, Spectra and geodesic flows on nilmanifolds: Reductions of Hamiltonian systems and differential operators, J. Math. Soc. Japan (to appear).

[6] R. Kuwabara, A note on the deformations of Hamiltonian systems on nilmanifolds, J. Math. Tokushima Univ. (to appear).

[7] J. Marsden and A. Weinstein, Reduction of symplectic manifolds with symmetry, Rep. Math. Phys. **5** (1974), 121-130.

[8] H. Ouyang, and H. Pesce, Déformations isospectrales sur les nilvariétés de rang deux, C. R. Acad. Sci. Paris **314**(1992), 621-623.